ΠΡΑΞΕΙΣ - ΟΜΑΔΕΣ

1) Να εξετάσετε αν οι ακόλουθες πράξεις είναι καλά ορισμένες:

- Στο $\mathbb{Z}$, $a \square b = a^2 \cdot b^3$
- Στο $\mathbb{Z}$, $a \square b = \dfrac{a}{a^2+b}$ $\Big|$ $a, b \in \mathbb{Z}$
- Στο $A = \{1, 2, 3, -4\}$, $a \square b = |b|$, $a, b \in A$
- Στο $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $a \square b = a + b$, $a, b \in B$
- Στο $\mathbb{R}^*$, $a \square b = |a \cdot b|$, $a, b \in \mathbb{R}^*$
- Στο $\Gamma = \{-1, 1\}$, $a \square b = a \cdot b$, $a, b \in \Gamma$
- Στο $\mathbb{N}$, $a \square b = \text{ΕΚΠ}(a, b)$, $a, b \in \mathbb{N}$

ΛΥΣΗ

- $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) : a \square b = a^2 \cdot b^3 \in \mathbb{Z}$ (κ.ο)
- $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) : a \square b = \dfrac{a}{a^2+b} \notin \mathbb{Z}$ (όχι κ.ο)

  Καταρχάς αν $a = b = 0$ δεν ορίζεται και δεύτερον για $a = 1$ και $b = 2$ έχουμε $a \square b = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$
- Παρατηρούμε ότι το ζεύγος

  $(a, -4) \longleftrightarrow |-4| = 4 \notin A$ (όχι κ.ο)
- Παρατηρούμε ότι το ζεύγος

  $(1, 4) \longleftrightarrow 1 + 4 = 5 \notin B$ (όχι κ.ο)
- Προφανώς, για κάθε a, b εν $\mathbb{R}^*$ τότε:

  $(a, b) \longleftrightarrow |a \cdot b| \in \mathbb{R}^*$ (κ.ο)
- $(1, -1) \longleftrightarrow -1 \in A$, $(-1, 1) \longleftrightarrow -1 \in A$ $\Big|$ (κ.ο)

  $(1, 1) \longleftrightarrow 1 \in A$, $(-1, -1) \longleftrightarrow 1 \in A$
- Από ορισμό του ΕΚΠ έχουμε ότι

  $(\forall a, b$ εν $\mathbb{Z}^*)$: ο αριθμός $[a, b]$ (ή ΕΚΠ(a, b)) είναι ένας φυσικός αριθμός (με κάποια ιδιότητα.)

2) Εστω το συνολο $A=\{a,b\}$ τοτε οριστε πράξη στο A, $\square$ ωστε το $(A,\square)$ να είναι ομάδα.

ΛΥΣΗ

ΠΙΝΑΚΑΣ

$\square$	a	b
a	a	b
b	b	a

Επιδιώκουμε να ισχυει:
1) Προσεταιριστικότητα
2) ουδετερος
3) Αντίστροφος

Θεωρουμε ως ουδετερο στοιχείο το a τότε μας μένει να συμπληρώσουμε το τελευταίο κουτάκι (δηλ. αν $b\square b=a$ ή b)
Εαν, $b\square b=b$ τότε δεν θα είχαμε αντίστροφο για το $b\in A$. Άρα, αναγκαστικά $b\square b=a$
Τελος, ισχυει και η προσεταιριστικότητα.

3) Εστω το σύνολο $A=\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a\cdot b\neq 0 \text{ και } a,b,c \in \mathbb{Z}\right\}$
Για ποια $a,b\in\mathbb{Z}$ το συνολο A εφοδιασμενο με την πράξη γινόμενο πινάκων να αποτελεί ομάδα;

ΛΥΣΗ

Οπως ομάδα: $(\exists A'): A\square A'=A'\square A=I_2$
Αναζητούμε τον αντίστροφο του A

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a' & c' \\ d' & b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} aa'+cd'=1 \\ ac'+cb'=0 \\ bd'=0 \Longrightarrow b=0 \text{ ή } d'=0 \\ bb'=1 \Longrightarrow \boxed{b'=\frac{1}{b}},\ b\neq 0 \end{cases}$$

Έτσι, καταλήγουμε ότι:
για $d'=0$ και $b'=\frac{1}{b}$ τότε

$ac'+c\cdot\frac{1}{b}=0$ και $aa'+c\cdot 0=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{c'=-\frac{c}{a\cdot b}}$ και $\boxed{a'=\frac{1}{a}}$, $a,b\neq 0$

Απο την προσεταιρ. ιδιότητα και το ουδέτερο στοιχείο δεν βγαίνει κάποιο συμπέρασμα

Για, $a,b\in\mathbb{Z}^*$ και $c\in\mathbb{Z}$ το $(A,\cdot)$ ομάδα.